Математическое моделирование НДС подземных полимерных трубопроводов, взаимодействующих с окружающим грунтом по вязкоупругому закону

Н. А. Нишонов [1], E-mail: nematilla81@mail.ru,
А. Х. Маткаримов [2], Э. А. Косимов [1]

[1] Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз
[2] Ташкентский государственный транспортный университет

Аннотация. *В статье разработана математическая модель подземных трубопроводов из полимерных материалов с вязкоупругим взаимодействием, для изучения НДС подземных трубопроводов, расположенных в водонасыщенной грунтовой среде, при сейсмических воздействиях.*

Ключевые слова: *подземных полимерных трубопровода, взаимодействия с грунтом, сейсмических воздействия, нормального напряжения, касательного напряжения.*

Введение

Подземные трубопроводы из полимерных материалов, применяемые в современном строительстве, обладают свойством податливости к большим перемещениям. Для определения их механических характеристик необходимо построить математическую модель, отражающую физический смысл и концептуальные закономерности механического поведения полимера. В работе [1] изучены колебания полимерных труб, расположенных в однородных грунтовых условиях, в [2] рассмотрены вопросы строительства полимерных труб в канализации. В [3] исследованы продольные и поперечные колебания вязкоупругих подземных трубопроводов при сейсмических воздействиях. Получены интегро-дифференциальные уравнения, определяющие продольные и поперечные перемещения трубопроводов относительно грунта, которые решаются методом усреднения. В работе [4] нами решались задачи о колебаниях подземных полимерных трубопроводов с учетом переменного коэффициента взаимодействия при различных видах сейсмических нагрузок. Исследовано напряженно–деформированное состояние подземных полимерных трубопроводов, связь между напряжениями, деформациями и скоростями записана по модели Фойгта. Рассмотрим общую интегральную модель связи между напряжениями и деформациями в вязкоупругих телах по наследственной теории Больцмана–Вольтерра со слабосингулярными ядрами наследственности. Модель Больцмана-Вольтерра с сингулярными ядрами наследственности типа Абеля хорошо согласуется с экспериментами и тождественно учитывает фактор времени, связанный с ползучестью деформации и релаксацией напряжений [5 – 9].

Разработка моделей

Рассмотрим подземный трубопровод, у которого ось x направлена вдоль оси трубопровода. Обозначим через u(x,t) продольное смещение и σ – напряжение в сечении. Если ρ – плотность материала, F – площадь поперечного сечения трубы, то уравнение движения примет следующий вид [10]:

$$\rho F \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} = F \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}} - 2\pi R k_x(\bar{x})(\bar{u} - \bar{u}_0) \qquad (1)$$

Для нормального напряжения подземных полимерных трубопроводов и касательного напряжения взаимодействия с грунтом принимаем [5, 6, 9]

$$\sigma = E\left[\varepsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)\,d\tau\right],$$

$$\tau(x,t) = D_в\left[(\bar{u} - \bar{u}_0) - \int_0^t \Gamma_в(t-\eta)\left[\bar{u}(x,\eta) - \bar{u}_0(x,\eta)\right]d\eta\right], \qquad (2)$$

$$D_в = 2\pi R k_x(\bar{x}).$$

В этом случае в уравнении (1) необходимо напряжения заменить выражениями по формуле (2)

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} = E\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \int_0^t \Gamma(\bar{t}-\tau)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}d\tau\right) -$$
$$- \bar{D}_в\left[(\bar{u} - \bar{u}_0) - \int_0^t \Gamma_в(\bar{t}-\eta)\left[\bar{u}(\bar{x},\eta) - \bar{u}_0(\bar{x},\eta)\right]d\eta\right], \qquad (3)$$

где E – модуль упругости материала трубы; $\Gamma(t-\tau)$ – функция влияния напряжения, убывающая при возрастании $(t-\tau)$; $k_x(x)$ – коэффициент продольного взаимодействия трубопровода с грунтовой средой; R и r –

соответственно внешний и внутренний радиусы трубопровода; u_0 – перемещение грунта при сейсмическом нагружении.

Введем следующие безразмерные величины $\bar{x} = lx$, $\bar{u} = 2Ru$, $\bar{t} = t_0 \cdot t$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \int_0^t \Gamma(t-\tau)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} d\tau - \\ - D_1 k_x(x)\left[(\bar{u} - \bar{u}_0) - \int_0^t \Gamma_в(t-\eta)\left[u(x,\eta) - u_0(x,\eta)\right]d\eta\right] \quad (4)$$

Здесь $D_1 = \frac{2Rl^2}{E(R^2 - r^2)}$.

Реологические свойства трубопровода учтем с помощью слабосингулярного ядра Колтунова – Ржаницына с тремя реологическими параметрами A_b, β и α вида [9]

$$\Gamma(t) = \bar{A}e^{-\bar{\beta}t}t^{\alpha-1},\ 0 < \alpha < 1,\ [\bar{\beta}] = c^{-1},\ [\bar{A}] = c^{-\alpha}; \\ \Gamma_в(t) = \bar{A}_в e^{-\bar{\beta}_в t}t^{\alpha_в - 1},\ 0 < \alpha_в < 1,\ [\bar{\beta}_в] = c^{-1},\ [\bar{A}_в] = c^{-\alpha_в}; \quad (5)$$

где A_b – параметр вязкости; β – реологический параметр вязкости; α – параметр сингулярности ядра наследственности, определяемый экспериментально.

Произведя замену переменных $t - \tau = z^r$, $r = \alpha_i^{-1}$ по методике [9], получим

$$\int_0^{t_m} \Gamma_i(t-\tau)T_n(\tau)d\tau = A_i \int_0^{t_m} (t-\tau)^{\alpha_i - 1} e^{-\beta_i(t-\tau)} T_n(\tau) = \\ \frac{A_i}{\alpha_i}\int_0^{t_m} e^{-\beta_i z^{r_i}} T_n(t_m - z^r)dz \quad (6)$$

Полагая, что $t = t_i,\ t_i = i\Delta t,\ i = 1,2\ldots$ (Δt=const – шаг интерполяции), будем иметь

$$\frac{A_i}{\alpha_i}\sum_{j=1}^{m} B_{ji} e^{-\beta_i t_j} T_{n,m+1,-j} \quad (7)$$

где

$$B_{ij} = \frac{\Delta t^{\alpha_i}}{2}\left[(j+1)^{\alpha_i} - (j-1)^{\alpha_i}\right], \qquad j = 2, m-1; \qquad B_{i1} = \Delta t^{\alpha_i}/2;$$

$$B_{im} = \frac{\Delta t^{\alpha_i}}{2}\left[m^{\alpha_i} - (m-1)^{\alpha_{i1}}\right].$$

Тогда (4) с учетом (7) примет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{A_i}{\alpha}\sum_{j=1}^{m} B_j e^{-\beta t_j}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t_m - t_j) -$$
$$- D_1 k_x(x)\left[(u - u_0) - \frac{A_b}{\alpha_b}\sum_{j=1}^{m} B_j^b e^{-\beta_b t_j}\left[u(x, t_m - t_j) - u_0(x, t_m - t_j)\right]\right] \tag{8}$$

Для решения сформированной краевой задачи используем метод конечных разностей. При этом дифференциальные слагаемые уравнения (8) аппроксимируем центральными разностными схемами второго порядка точности и решаем относительно $u_{k,j+1}\,(k = i-1, i, i+1)$

$$u_{i,j+1} = \frac{\tau^2}{h^2}u_{i-1,j} + \left(2 - \tau^2 D_1 k_i(x) - \frac{2\tau^2}{h^2}\right)u_{i,j} + \frac{\tau^2}{h^2}u_{i+1,j} - u_{i,j-1} +$$
$$+ \tau^2 D_1 k_i(x)\frac{A_b}{\alpha_b}\sum_{k=1}^{j+1} B_k^b e^{-\beta_b t_k}\left(u_{i,j+1-k} - u^0_{i,j+1-k}\right) -$$
$$- \frac{A\tau^2}{\alpha h^2}\sum_{k=1}^{j+1} B_k^b e^{-\beta t_k}(u_{i+1,j+1-k} - 2u_{i,j+1-k} + u_{i-1,j+1-k}) + \tag{9}$$
$$+ D_1\tau^2 k_i(x)\,u^0_{i,j}.$$

Продольное напряжение в полимерной трубе, определяемое по формуле (2), с учетом введенных безразмерных параметров запишется в виде

$$\sigma = E\frac{2R}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{A_b}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} B_k^b e^{-\beta t_k} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{10}$$

Уравнение (10) с учетом аппроксимации центрально разностной схемы второго порядка примет вид

$$\sigma_{i,j} = \frac{ER}{lh}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) - \frac{A_b}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} B_k^b e^{-\beta t_k}\frac{ER}{lh}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \tag{11}$$

Рассмотрим случай выполнения граничных условий, когда оба конца трубы защемлены:

$$u_{0,j} = 0; \; u_{N,j} = 0. \qquad (12)$$

Начальные условия

$u\big\|_{t=0} = u_{i,0} = 0\big\|; u\big\|_{t=0} = u_{i,0} = 0\big\|.$ $\frac{1}{2\tau}\left(u_{i,1} - u_{i,-1}\right) = u_{i,0} = 0; \qquad u_{i,-1} = u_{i,1}$	(13)

С изменением граничных условий при i=1 и i=N и начальных условий при j=0 соответственно изменяются приведенные алгоритмы.

Для решения алгебраического уравнения (9) используется метод исключения Гаусса. При этом учитываются начальные условия (12) и граничные условия (13).

Заключение

В данной статье приведены математическое моделирование подземных трубопроводов из полимерных материалов с вязкоупругим взаимодействием для изучения НДС подземных трубопроводов, расположенных в водонасыщенной грунтовой среде, при сейсмических воздействиях. Поставлена задачи для определения НДС полимерных трубопроводов с учетом влияния условий закрепления, грунтовых условий, степени влажности и изменения ее режима по длине трубопровода при различных видах сейсмических нагрузок.

Литература

1. Мухамедова С. Исследование сейсмостойкости трубопроводов из полимерных материалов: Автореф. дис. канд. техн. наук. Ташкент, 1983.
2. Касимов А. Г. Применение пластмассовых труб в системе канализации с учетом сейсмичности. // Автореф. дис. канд. техн. наук. – М. 1989.
3. Маткаримов А. Х. Вопросы сейсмодинамики подземных сооружений с учетом вязкоупругих свойств сооружений и контакта их с грунтом. Автореф. дис. канд. техн. наук. Ташкент, 1974 г.
4. Нишонов Н. А. Колебания подземных трубопроводов с переменными коэффициентами взаимодействия при сейсмических нагружениях // Узб. журнал «Проблемы механики», 2013. №3-4, – С. 30–36.
5. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

6. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1983. – 345 с.

7. Эшматов Б. Х. Нелинейные колебания и динамическая устойчивость вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки с учетом деформации сдвига и инерции вращения // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. – С.102–117.

8. Ходжаев Д. А., Эшматов Б. Х. Нелинейные колебания вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами. // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т.48. № 6. – С.158–169.

9. Бадалов Ф. Б. Методы решения интегральных и интегродифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. – 272 с.

10. Рашидов Т. Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.